Sia data la forma differenziale $\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$ $\underline{x} \in \mathbf{R}^2$ che supponiamo definita su tutto $\mathbf{R}^2$. Supponiamo che ω sia chiusa ossia $a_y = b_x$. Vogliamo trovare il potenziale. Un modo è quello di integrare lungo i due segmenti condiungenti i punti (x_0, y_0), (x, y_0) e (x, y_0), (x, y). Tale integrazione conduce alla funzione $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} b(x,u)du$. A lezione ho considerato, oltre a quello appena scritto, un secondo modo. Si risolve l'equazione $f_x = a(\underline{x})$ ottenendo $f(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t,y)dt + h(y)$. Grazie al fatto che la forma è chiusa si ottiene $f_y = \int_{x_0}^{x} a_y(t,y)dt + h_y = \int_{x_0}^{x} b_x(t,y)dt + h_y$. Tale espressione è uguale a $b(x,y) - b(x_0,y) + h_y$ e deve essere uguale a $b(x,y)$ per cui si ha $h_y(y) = b(x_0, y)$. Quindi abbiamo $h(y) = \int_{y_0}^{y} b(x_0,u)du$. Sommando con quanto scritto prima si ottiene $f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} a(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} b(x_0,u)du$.

Tale espressione sembra essere diversa dalla f trovata prima. Saprebbe lo studente/ssa spiegare perché? Il primo studente/ssa che fornirà la risposta giusta via posta elettronica entro sabato mattina alle ore 13.00 riceverà un bonus tre voti da aggiungersi al voto finale. La risposta deve essere dettagliata e non accennata.

Naturalmente una situazione analoga si verifica per forme differenziali esatte in $\mathbf{R}^3$. Sia data la forma $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$, $\underline{x} \in \mathbf{R}^3$ tale che il rotore del campo vettoriale (a,b,c) è il vettore nullo. Risolviamo la equazione $f_x = a(\underline{x})$ per cui $f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} dt a(t,y,z) + h(y,z)$. $f_y = \int_{x_0}^{x} dt a_y(t,y,z) + h_y(y,z) = \int_{x_0}^{x} dt b_x(t,y,z) + h_y(y,z) = b(\underline{x})$ se $b(x,y,z) - b(x_0,y,z) + h_y(y,z) = b(x,y,z)$ ossia $h_y(y,z) = b(x_0,y,z)$. Ne segue $h(y,z) = \int_{y_0}^{y} du b(x_0,u,z) + k(z)$ e quindi fino ad ora si ha $f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} dt a(t,y,z) + \int_{y_0}^{y} du b(x_0,u,z) + k(z)$. Ora bisogna derivare rispetto a z ed uguagliare a $c(\underline{x})$. $f_z(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} dt a_z(t,y,z) + \int_{y_0}^{y} du b_z(x_0,u,z) + k_z(z) = \int_{x_0}^{x} dt c_x(t,y,z) + \int_{y_0}^{y} du c_y(x_0,u,z) + k_z(z) = c(x,y,z) - c(x_0,y,z) + c(x_0,y,z) - c(x_0,y_0,z) + k_z(z)$ e vogliamo che tale espressione sia uguale a $c(x,y,z)$. Ciò implica che $c(x_0,y_0,z) = k_z(z)$ da cui $k(z) = \int_{z_0}^{z} dv c(x_0,y_0,v)$. Alla fine abbiamo ottenuto $f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} dt a(t,y,z) + \int_{y_0}^{y} du b(x_0,u,z) + \int_{z_0}^{z} dv c(x_0,y_0,v)$.